К результату Ильяшенко-Хованского о разрешимости в квадратурах фуксовых систем с малыми коэффициентами

Вьюгин И.В.
ИППИ РАН
vyugin@gmail.com

Гонцов Р.Р.
ИППИ РАН
rgontsov@inbox.ru

Аннотация

Работа посвящена разрешимости в квадратурах фуксовых систем линейных дифференциальных уравнений. Уточняется результат Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованского, получивших критерий разрешимости фуксовых систем с достаточно малыми коэффициентами.

1. Введение

Рассмотрим на сфере Римана $\overline{\mathbf{C}}$ однородное линейное дифференциальное уравнение (систему линейных дифференциальных уравнений) с мероморфными коэффициентами. Говорят, что оно *разрешимо в квадратурах*, если любое решение содержится в некотором расширении F поля $\mathbf{C}(z)$ рациональных функций, полученном при помощи присоединения экспонент и интегралов:

$$\mathbf{C}(z) = F_1 \subseteq \ldots \subseteq F_m = F,$$

где поле $F_{i+1} = F_i\langle x_i\rangle$ получается присоединением к полю F_i элемента x_i, являющегося экспонентой или интегралом некоторого элемента поля F_i.

В данной работе мы ограничимся исследованием разрешимости в квадратурах *фуксовых систем* линейных дифференциальных уравнений, т. е. систем вида

$$\frac{dy}{dz} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{z-a_i}\right) y, \tag{1}$$

где $y(z)$ – вектор в $\mathbf{C}^p$, $B_1,\ldots,B_n$ – комплексные $(p \times p)$-матрицы (матрицы-вычеты системы в соответствующих особых точках $a_1,\ldots,a_n \in \mathbf{C}$). Важной характеристикой линейной системы является монодромия, или представление монодромии, определяемое ниже.

Рассмотрим в окрестности D неособой точки z_0 фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы (1). Аналитическое продолжение матрицы $Y(z)$ вдоль произвольной петли γ, начинающейся в z_0 и лежащей в $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}$, преобразует эту матрицу в, вообще говоря, другую матрицу $\widetilde{Y}(z)$. Две фундаментальные матрицы связаны с помощью невырожденной матрицы перехода G_γ, соответствующей петле γ:

$$\widetilde{Y}(z) = Y(z)G_\gamma.$$

Отображение $[\gamma] \mapsto G_\gamma^{-1}$ зависит только от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ и, таким образом, определяет представление

$$\chi : \pi_1(\overline{\mathbf{C}} \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}, z_0) \longrightarrow \mathrm{GL}(p,\mathbf{C})$$

фундаментальной группы пространства $\overline{\mathbf{C}} \setminus \{a_1,\ldots,a_n\}$ в пространство невырожденных комплексных матриц размера $p \times p$. Это представление и называется *монодромией* линейной системы.

Под *матрицей монодромии* системы (1) в особой точке a_i по отношению к фундаментальной матрице $Y(z)$ понимают матрицу G_i, соответствующую простой петле γ_i, обходящей точку a_i, так что $G_i^{-1} = \chi([\gamma_i])$. Матрицы $G_1,\ldots,G_n$ являются образующими *группы монодромии* системы (1).

Необходимым и достаточным условием разрешимости в квадратурах фуксовой системы (1) является разрешимость ее группы монодромии (см. [4], Глава 6, теор. 1.12). Напомним, что группа H называется разрешимой, если для нее существует башня нормальных подгрупп $H = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = e$ такая, что фактор-группа H_{i-1}/H_i коммутативна при каждом $i = 1,\ldots,m$. В случае когда коэффициенты B_i фуксовой системы (1) малы, Ю. С. Ильяшенко и А. Г. Хованский [2] получили явный критерий разрешимости такой системы. А именно, справедливо следующее утверждение:

Существует $\varepsilon = \varepsilon(n,p) > 0$ такое, что условие разрешимости в квадратурах для фуксовой системы (1) с $\|B_i\| < \varepsilon$ принимает явный вид: система решается в квадратурах, если и *только если все матрицы B_i (в некотором базисе) треугольны.*

Данное утверждение основано на результатах И. А. Лаппо-Данилевского [3], который показал, что каждая матрица монодромии G_i выражается специальным степенным рядом от матриц-вычетов $B_1,\ldots,B_n$, начинающимся с единичной матрицы и сходящимся при любых $B_1,\ldots,B_n$. Более того, если матрицы B_i достаточно малы, то они являются однозначными аналитическими функциями от матриц монодромии $G_1,\ldots,G_n$ и выражаются через них специальными степенными рядами, сходящимися при $G_1,\ldots,G_n$, близких к единичной матрице. Но группа (в данном случае группа монодромии фуксовой системы), порожденная матрицами, близкими к единичной, разрешима тогда и только тогда, когда эти матрицы треугольны (см. [4], Глава 6, теор. 2.7).

В книге [4] (замечание на стр. 221) А. Г. Хованский указывает на предположение А. А. Болибруха о том, что в условии критерия разрешимости требование малости матриц B_i можно ослабить. *Достаточно лишь требовать, чтобы собственные числа этих матриц были малы.* В настоящей работе мы уточняем формулировку этого предположения и приводим его доказательство (теорема 1).

2. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Пусть собственные значения β_i^j матриц-вычетов B_i фуксовой системы* (1) *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \qquad i=1,\ldots,n,\quad j=1,\ldots,p.$$

Тогда представление монодромии такой системы верхнетреугольно, если и только если все матрицы B_i (в некотором базисе) верхнетреугольны.

Доказательство. Воспользуемся геометрической интерпретацией (подробно изложенной в книге А. А. Болибруха [1]), согласно которой фуксовой системе (1) соответствует голоморфно тривиальное векторное расслоение E ранга p над сферой Римана с логарифмической связностью ∇. Поскольку представление монодромии системы верхнетреугольно, то существует $E^1\subset E^2\subset\ldots\subset E^p=E$ – полный флаг подрасслоений рангов $1,2,\ldots,p$ соответственно, которые стабилизируются связностью ∇ (всякому подпредставлению монодромии размерности k соответствует подрасслоение ранга k, стабилизирующееся связностью).

Степень (которая является целым числом) голоморфного векторного расслоения с логарифмической связностью можно определить как сумму всех собственных значений матриц-вычетов связности по всем особым точкам. Для того чтобы найти степень подрасслоения ранга k, которое стабилизируется связностью, нужно в каждой особой точке просуммировать некоторые k собственных значения матрицы-вычета (какие именно – вопрос более сложный, но ответ на него в данном случае нам не понадобится). Из условия леммы следует, что степени всех подрасслоений E^k равны нулю. Действительно, $\deg E^p=0$, а для $k\le p-1$ имеем:

$$\deg E^k=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i,\,|J_i|=k}\beta_i^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in J_i,\,|J_i|=k}\operatorname{Re}\beta_i^j> \\ >-\frac{k}{p-1}\ge -1\Longrightarrow \deg E^k=0$$

(степень подрасслоения голоморфно тривиального векторного расслоения не положительна). Таким образом, все подрасслоения E^k голоморфно тривиальны (подрасслоение голоморфно тривиального векторного расслоения голоморфно тривиально, если его степень равна нулю) и матрицы B_i одновременно приводятся к верхнетреугольному виду. Последнее следует из такого общего утверждения.

Лемма 2. *Если E – голоморфно тривиальное векторное расслоение ранга p над $\overline{\mathbf{C}}$ с логарифмической связностью, имеющее голоморфно тривиальное подрасслоение $E'\subset E$ ранга k, которое стабилизируется связностью, то все матрицы-вычеты B_i соответствующей фуксовой системы в некотором базисе имеют блочно-верхнетреугольный вид:*

$$B_i=\begin{pmatrix} B_i' & * \\ 0 & * \end{pmatrix},\quad i=1,\ldots,n,$$

где B_i' – блоки размера $k\times k$.

Доказательство. Пусть $\{s_1,\ldots,s_p\}$ – базис глобальных голоморфных сечений расслоения E (линейно независимых в каждой точке $z\in\overline{\mathbf{C}}$), в котором 1-форма связности – это 1-форма коэффициентов системы. Рассмотрим также базис $\{s_1',\ldots,s_p'\}$ глобальных голоморфных сечений расслоения E такой, что $s_1',\ldots,s_k'$ – сечения подрасслоения E', $(s_1',\ldots,s_p')=(s_1,\ldots,s_p)C^{-1}$, $C\in\mathrm{GL}(p,\mathbf{C})$.

Выберем теперь такой базис $\{h_1,\ldots,h_p\}$ сечений расслоения E, горизонтальных относительно связности, что $h_1,\ldots,h_k$ – сечения подрасслоения E' (это возможно, т. к. E' стабилизируется связностью). Пусть $Y(z)$ – фундаментальная матрица системы, столбцы которой суть координаты сечений $h_1,\ldots,h_p$ в базисе $\{s_1,\ldots,s_p\}$. Тогда

$$Y'(z)=CY(z)=\begin{pmatrix} k\times k & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

– блочно-верхнетреугольная матрица, поскольку ее столбцы – координаты сечений $h_1,\dots,h_p$ в базисе $\{s'_1,\dots,s'_p\}$. Следовательно, преобразование $y' = Cy$ приводит исходную систему к блочно-верхнетреугольному виду. Лемма 2 (а вместе с ней и лемма 1) доказана.

Матрицу G назовем *N-резонансной*, если найдутся два ее собственных значения $\lambda_1 \neq \lambda_2$ такие, что $\lambda_1^N = \lambda_2^N$, т. е.

$$|\lambda_1| = |\lambda_2|, \quad \arg\lambda_1 - \arg\lambda_2 = \frac{2\pi}{N}\, j,\ j \in \{1,2,\dots,N-1\}.$$

Пусть группа $H \subset \mathrm{GL}(p,\mathbf{C})$ порождена матрицами $G_1,\dots,G_n$. Если эти матрицы достаточно близки к единичной, то из разрешимости группы H следует их треугольность. Согласно замечанию, следующему после теоремы 2.7 главы 6 из [4], требование близости матриц G_i к единичной можно ослабить.

Лемма 3. *Существует число $N = N(p)$ такое, что если матрицы $G_1,\dots,G_n$ не являются N-резонансными, то из разрешимости группы H следует треугольность этих матриц.*

3. Критерий разрешимости

Теорема 1. *Пусть собственные значения β_i^j матриц-вычетов B_i фуксовой системы* (1) *удовлетворяют условию*

$$\operatorname{Re}\beta_i^j > -\frac{1}{n(p-1)}, \qquad i = 1,\dots,n, \quad j = 1,\dots,p,$$

а также для каждой пары $\beta_i^j \neq \beta_i^k$ собственных значений матрицы B_i $(i = 1,\dots,n)$ выполнено одно из двух условий:

1) $\operatorname{Re}\beta_i^j - \operatorname{Re}\beta_i^k \notin \mathbf{Q}$;

2) $\operatorname{Im}\beta_i^j \neq \operatorname{Im}\beta_i^k$.

Тогда разрешимость фуксовой системы (1) *в квадратурах эквивалентна треугольности* (*в некотором базисе*) *всех матриц B_i.*

Доказательство. Собственные значения λ_i^j матрицы монодромии G_i связаны с собственными значениями β_i^j матрицы-вычета B_i фуксовой системы следующим соотношением (см. [1], лекция 6):

$$\lambda_i^j = \exp(2\pi\mathbf{i}\beta_i^j), \qquad \mathbf{i} = \sqrt{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\lambda_i^j &= \exp(2\pi\mathbf{i}(\operatorname{Re}\beta_i^j + \mathbf{i}\operatorname{Im}\beta_i^j)) = \\ &= e^{-2\pi\operatorname{Im}\beta_i^j}(\cos(2\pi\operatorname{Re}\beta_i^j) + \mathbf{i}\sin(2\pi\operatorname{Re}\beta_i^j)),\end{aligned}$$

и в силу условий на числа β_i^j матрицы G_i не могут быть N-резонансными ни при каком N. Теперь утверждение теоремы следует из лемм 1, 3.

Список литературы

[1] А. А. Болибрух, *Обратные задачи монодромии в аналитической теории дифференциальных уравнений*, М.: МЦНМО, 2009.

[2] Ю. С. Ильяшенко, А. Г. Хованский, *Теория Галуа систем дифференциальных уравнений типа Фукса с малыми коэффициентами*, Препринт ИПМ АН СССР, 1974, N 117.

[3] И. А. Лаппо-Данилевский, *Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: ГТТИ, 1957.

[4] А. Г. Хованский, *Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде*, М.: МЦНМО, 2008.