

# Расчет допустимых линейных и угловых ускорений при планировании траекторий БПЛА

М.А. Андреев  
ИППИ РАН, Москва  
andreevm@iitp.ru

Б.М. Миллер  
ИППИ РАН, Москва и Университет Монаш, Австралия  
bmiller@iitp.ru

А.Б. Миллер  
ИППИ РАН, Москва  
amiller@iitp.ru

К.В. Степанян  
ИППИ РАН, Москва  
KVStepanyan@iitp.ru

## Аннотация

В рамках задачи планирования миссии беспилотного летательного аппарата (БПЛА) рассматривается вопрос расчета допустимых скоростей и ускорений выбранной перепараметризации траектории БПЛА для заданного профиля скорости или ускорения и заранее выбранной траектории. Траектория как кривая в трехмерном пространстве заранее известна. Требуется определить график полета так, чтобы удовлетворить требованиям к перегрузке и ускорениям.

## 1. Введение

Задача планирования миссии летательного аппарата в условиях риска является достаточно давно рассматриваемым вопросом [1, 2] и в настоящее время является актуальным предметом исследования в контексте управления автономным БПЛА [3–7]. В данной работе предполагается, что траектория движения БПЛА уже каким-то образом задана, например, явно как гладкая кривая, проходящая через определенные точки или как решение задачи оптимального управления минимизации интегрального риска [8, 9]. Теперь требуется удовлетворить определенным требованиям к перегрузкам, времени пролета, расходу топлива для заданной траектории. Для

этого можно выполнить замену времени в параметризации траектории так, чтобы удовлетворить этим требованиям.

## 2. Постановка задачи

Пусть задана траектория полета, как дважды дифференцируемую неявную функцию от параметра  $s$ :  $x_s = x(s), y_s = y(s), z_s = z(s)$ . Данные функции могут быть получены как полиномиальная или сплайновая аппроксимация решения граничной дифференциальной задачи для угла рыскания БПЛА в постановке оптимального управления из принципа максимума Понтрягина или заданы в виде точек маршрута. Обозначим производные этих функций по их аргументу как:  $x'_s = \dot{x}(s), y'_s = \dot{y}(s), z'_s = \dot{z}(s); x''_s = \ddot{x}(s), y''_s = \ddot{y}(s), z''_s = \ddot{z}(s)$ . Пусть также заданы профили линейной скорости и ускорений как функции времени. Скорость вдоль траектории обозначим  $v_t = v(t)$ , профиль линейных перегрузок по вертикали  $a_z(t)$ , в плоскости  $XY$  -  $a_{xy}(t)$  и полное линейное ускорение  $a_{xyz}(t)$ . Требуется определить такую замену аргумента  $s = \mu(t)$ , чтобы движение БПЛА по заданной траектории удовлетворяло данным профилям скорости или ускорения.

## 2.1. Профиль скорости

Рассмотрим профиль скорости  $v_t$ , тогда перепараметризация может быть получена как решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_t &= \frac{v_t x'_s(\mu_t)}{\sqrt{x'_s(\mu_t)^2 + y'_s(\mu_t)^2 + z'_s(\mu_t)^2}}, \\ \dot{y}_t &= \frac{v_t y'_s(\mu_t)}{\sqrt{x'_s(\mu_t)^2 + y'_s(\mu_t)^2 + z'_s(\mu_t)^2}}, \\ \dot{z}_t &= \frac{v_t z'_s(\mu_t)}{\sqrt{x'_s(\mu_t)^2 + y'_s(\mu_t)^2 + z'_s(\mu_t)^2}}, \\ \dot{\mu}_t &= \frac{v_t}{\sqrt{x'_s(\mu_t)^2 + y'_s(\mu_t)^2 + z'_s(\mu_t)^2}}.\end{aligned}\quad (1)$$

Чтобы получить линейные ускорения данную систему необходимо дополнить следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_t &= \dot{\mu}_t x'_s(\mu_t) + (\dot{\mu}_t)^2 x''_s(\mu_t), \\ \ddot{y}_t &= \dot{\mu}_t y'_s(\mu_t) + (\dot{\mu}_t)^2 y''_s(\mu_t), \\ \ddot{z}_t &= \dot{\mu}_t z'_s(\mu_t) + (\dot{\mu}_t)^2 z''_s(\mu_t), \\ \dot{\mu}_t &= \frac{v_t}{\sqrt{x'_s(\mu_t)^2 + y'_s(\mu_t)^2 + z'_s(\mu_t)^2}} - \\ &= \frac{v_t \dot{\mu}_t \{x'_s(\mu_t)x''_s(\mu_t) + y'_s(\mu_t)y''_s(\mu_t) + z'_s(\mu_t)z''_s(\mu_t)\}}{[x'_s(\mu_t)^2 + y'_s(\mu_t)^2 + z'_s(\mu_t)^2]^{3/2}}.\end{aligned}\quad (2)$$

## 2.2. Профиль по ускорению

Введем дополнительную переменную состояния  $v_t = \dot{\mu}_t$  и рассмотрим три варианта: задано ускорение в одном измерении  $a_z(t)$ , в плоскости рыскания  $XY - a_{xy}(t)$  и полное ускорение  $a_{xyz}(t)$ . Для  $a_z(t)$  получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_t &= v_t, \\ \dot{v}_t &= \frac{v_t^2 z''_s(\mu_t) - a_z}{z'_s(\mu_t)}, \\ \dot{x}_t &= v_t x'_s(\mu_t), \\ \dot{y}_t &= v_t y'_s(\mu_t), \\ \dot{z}_t &= v_t z'_s(\mu_t), \\ \dot{x}_t &= \dot{v}_t x'_s(\mu_t) + v_t^2 x''_s(\mu_t), \\ \dot{y}_t &= \dot{v}_t y'_s(\mu_t) + v_t^2 y''_s(\mu_t), \\ \dot{z}_t &= \dot{v}_t z'_s(\mu_t) + v_t^2 z''_s(\mu_t).\end{aligned}\quad (3)$$

Введем следующие вспомогательные функции:  $A_s = x'_s{}^2 + y'_s{}^2$ ,  $B_s = x'_s x''_s + y'_s y''_s$ ,  $C_s = x''_s{}^2 + y''_s{}^2$  тогда для ускорения в плоскости  $a_{xy}(t)$  в системе уравнений 3 необходимо заменить правую часть для  $\dot{v}_t$  следующим выражением:

$$\frac{\sqrt{v_t^4 [B_s^2(\mu_t) - 4A_s(\mu_t)C_s(\mu_t)] + 4A_s(\mu_t)a_{xz}(t) - v_t^2 B_s(\mu_t)}}{2A_s(\mu_t)}.$$

Для профиля ускорения в трехмерном варианте правая часть для  $\dot{v}_t$  также, а выражения для  $A_s$ ,  $B_s$  и  $C_s$  должны быть заменены на следующие  $A_s = x'_s{}^2 + y'_s{}^2 + z'_s{}^2$ ,  $B_s = x'_s x''_s + y'_s y''_s + z'_s z''_s$ ,  $C_s = x''_s{}^2 + y''_s{}^2 + z''_s{}^2$ .

## 3. Численные примеры

В качестве примера рассмотрим полиномиальную аппроксимацию траектории, проходящей через точки:  $(0, -4, 2)$ ,  $(1.0, -2, 1.8)$ ,  $(0.7, -1, 2.1)$ ,  $(0.1, 0, 2.3)$ ,  $(2, 2, 2.5)$  с константным профилем скорости  $v_t = 7.4772$ .

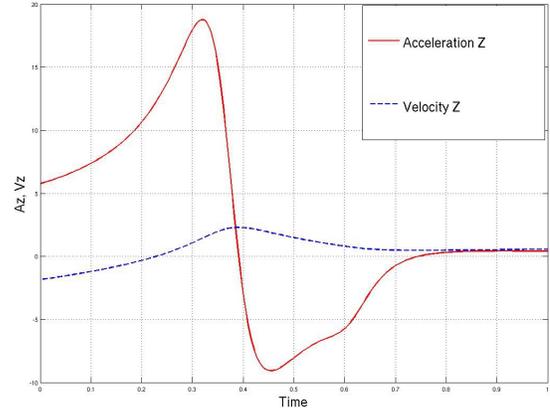


Рис. 1. Скорость и ускорение по вертикальной оси

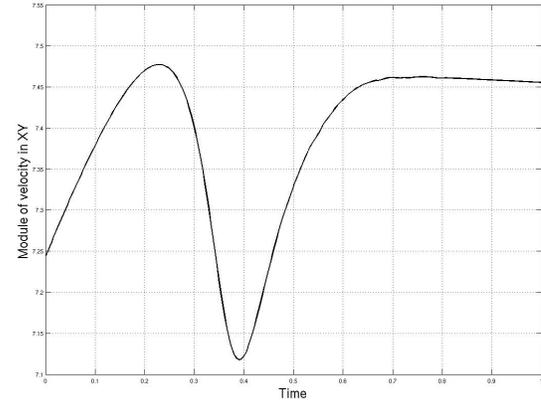


Рис. 2. Модуль скорости в плоскости угла рыскания

## 4. Заключение

Коллективом авторов был предложен оригинальный подход к решению задачи планирования миссии БПЛА. Эффективный поиск геометрических

реализаций субоптимальных траекторий, минимизирующих риск обнаружения БПЛА, был рассмотрен в нашей работе [10]. К выбранной субоптимальной

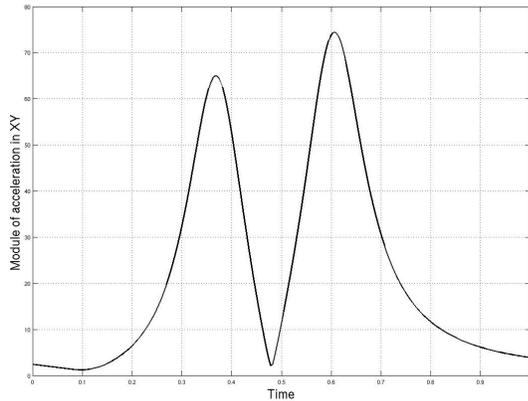


Рис. 3. Модуль ускорения в плоскости угла рыскания

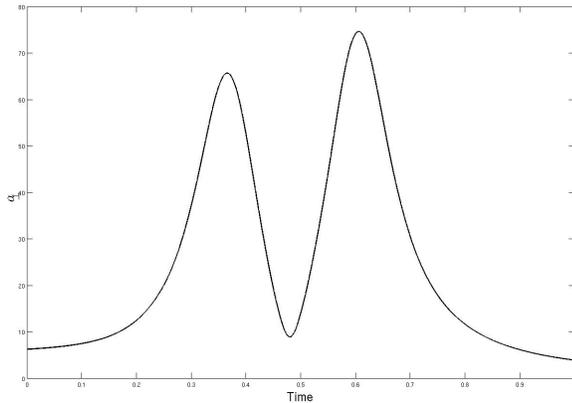


Рис. 4. Модуль трансверсального ускорения.

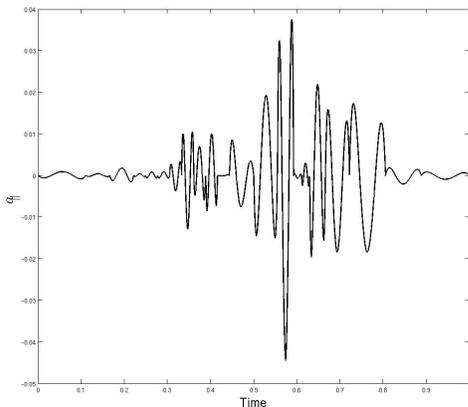


Рис. 5. Модуль продольного ускорения, в пределах погрешности решателя равен нулю.

траектории применяется описанная выше процедура перепараметризации так, чтобы удовлетворить заданным ограничениям на ускорения (перегрузки). В результате применения такого подхода мы получили реализацию семейства траекторий, имеющих одинаковую геометрию, но вдоль которых можно двигаться с разными заранее заданными скоростями. При этом существенно меняются ускорения вдоль найденной траектории. В данной работе мы рассмотрели задачу выбора перепараметризации времени для заданного профиля скорости в рамках предложенного подхода по реализации задачи планирования миссии БПЛА.

## Список литературы

- [1] A. Letov. *Flight Dynamics and Control*. Nauka, Fizmatlit, 1969 [in Russian].
- [2] J. Vian and J. Moore. *Trajectory Optimization with Risk Minimization for Military Aircraft*. AIAA J. Guidance, v. 12, no 3, 1989, pp. 311–317.
- [3] A. Dogan and U. Zengin. *Unmanned Aerial Vehicle Dynamic -Target Pursuit by Using Probabilistic Threat Exposure Map*. AIAA J. Guidance, Control and Dynamics, v. 29 (4), 2006, pp. 723–732.
- [4] A. Galayev, E. Maslov, and E. Rubinovich. *On a Motion Control Problem for an Objects in a Conflict Environment*. Journal of Computers and Systems Sciences International, v. 40, no 3, 2009, pp. 458–464.
- [5] M. Zabarankin, S. Uryasev, and P. Pardalos. *Optimal Risk Path Algorithm*. In: Cooperative Control and Optimization. Eds.: R. Murphay, P. Pardalos. Kluwer, Dordrecht, 2002, pp. 271–303.
- [6] R. Murphey, S. Uryasev, and M. Zabarankin. *Trajectory Optimization in a Threat Environment*. RESEARCH REPORT 2003-9, Department of Industrial & Systems Engineering, University of Florida, 2003.
- [7] M. Zabarankin, S. Uryasev, and R. Murphey. *Aircraft Routing under the Risk of Detection*. Naval Research Logistics v. 53, 2006, pp. 728–747.
- [8] К.В. Степанян, А.Б. Миллер, Б.М. Миллер *Планирование траектории БПЛА в сложных условиях при наличии угроз*. Материалы 33-й конференции молодых ученых и специалистов ИППИ РАН «Информационные технологии и системы» (ИТиС"10) Россия, Геленджик, 20–24 сентября 2010г., с.263-268
- [9] B. Miller, K. Stepanyan, A. Miller. *Simulation of permissible UAV trajectories* Proceedings of the VIII International Conference on Nonequilibrium Processes in Nozzles and Jets, NPNJ'2010 Alushta, Ukraine, 25-31 May 2010, Moscow Aviation Institute, pp. 321–323
- [10] B. Miller, K. Stepanyan, A. Miller, M. Andreev "Parallel implementation of the UAV path planning in a hazard environment"// Proceedings of the XVII International Conference on Computational Mechanics and Modern Applied Software Systems (CMMASS"2011), 25-31 May, 2011, Alushta, Crimea, Ukraine, pp. 698-700