

Оценка доли гарантированно исправимых ошибок двоичным X-МПП-кодом

Рыбин П. С.
ИППИ РАН
prybin@iitp.ru

Зяблов В. В.
ИППИ РАН
zyablov@iitp.ru

Аннотация

В работе рассматривается декодирование кодов с малой плотностью проверок с компонентным кодом Хэмминга (X-МПП-кодов). Основная идея алгоритма декодирования X-МПП-кода аналогична идеи алгоритма декодирования из работы 2009г. В. В. Зяблова, Р. Йоханнессона и М. Лончар: уменьшение количества невыполненных проверок на каждой итерации алгоритма. В предложенном алгоритме модифицируется только критерий выбора заменяемого (инвертируемого) символа. Критерий учитывает тот факт, что для проверок кода Хэмминга замена символа приводит не только к тому, что проверка становится либо выполненной, либо невыполненной, как для проверки на четность, но также и к тому, что невыполненная проверка останется невыполненной. Это позволяет снизить требования к количеству невыполненных проверок, чтобы гарантировать, что заменяемый символ найдется. Для предложенного алгоритма получена оценка на долю гарантированно исправимых ошибок с использованием методов оценки в графе Таннера числа ребер с заданными свойствами, разработанных В. В. Зябловым и П. С. Рыбиным в работе 2010г.

1. Введение

Корректирующие свойства кода с малой плотностью проверок (МПП-кода) Галлагера [1] для двоично-симметричного канала (ДСК) впервые были исследованы в работе [2], где было показано, что существует МПП-код Галлагера, способный гарантированно исправить линейную долю ошибок со сложностью порядка $\mathcal{O}(n \log n)$, где n – длина МПП-кода. Затем в работе [3] комбинаторными методами была получена более простая для вычисления аналитическая оценка корректирующей способности аналогичного декодера, но численные результаты оказались в большинстве случаев не лучше результатов, полу-

ченных по старой оценке [2].

МПП-код с компонентным кодом Хэмминга (X-МПП-код) был рассмотрен в работе [4]. Затем кодовое расстояние и 'мягкое' декодирование X-МПП-кодов было исследовано в работах [5] и [6]. В работе [7] было показано, что ансамбль X-МПП-кодов содержит коды с минимальным кодовым расстоянием, почти достигающим границу Варшавова-Гилберта. Затем путем обобщения методов, разработанных в [2], в работах [8] и [9] были получены результаты для X-МПП-кодов и q -ичных МПП-кодов, аналогичные результату из [2]. В работе [10] были обобщены методы из [2] для двоичного стирающего канала. Затем в работе [11] были разработаны методы оценки в графе Таннера числа ребер с заданными свойствами, что позволило получить новую оценку на долю гарантированно исправимых ошибок, которая немного улучшает оценку из [2] и значительно улучшает оценку из [8].

В данной работе мы рассматриваем тот же ансамбль X-МПП-кодов, как в работе [8] и [11]. Также остается неизменной основная идея алгоритмов декодирования X-МПП-кодов, рассмотренных в работах [8] и [11]: уменьшение количества невыполненных проверок кодов компонентов на каждой итерации алгоритма. Мы предлагаем немного модифицировать критерий замены символа. Критерий учитывает тот факт, что для проверок кода Хэмминга замена символа приводит не только к тому, что проверка становится либо выполненной, либо невыполненной, как для проверки на четность, но также и к тому, что невыполненная проверка останется невыполненной. Это позволяет снизить требования к количеству невыполненных проверок, чтобы гарантировать, что заменяемый символ найдется. Что в свою очередь позволяет улучшить оценку на долю гарантированно исправимых ошибок. В работе нами получена оценка с использованием методов оценки в графе Таннера числа ребер с заданными свойствами, разработанных в [11].

2. Построение и свойства X-МПП-кода

Рассмотрим построение проверочной матрицы \mathbf{H} кода с малой плотностью проверок кода Хемминга (X-МПП-кода). Проверочную матрицу кода Хемминга обозначим \mathbf{H}_0 . Запишем диагональную блочную матрицу \mathbf{H}_b с b проверочными матрицами \mathbf{H}_0 на главной диагонали:

$$\mathbf{H}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{H}_0 \end{pmatrix},$$

где b очень велико. Если размер матрицы \mathbf{H}_0 равен $m_0 \times n_0$, тогда размер матрицы \mathbf{H}_b – $bm_0 \times bn_0$. Обозначим $\pi(\mathbf{H}_b)$ случайную перестановку столбцов матрицы \mathbf{H}_b . Тогда матрица, составленная из $\ell > 2$ таких перестановок в качестве слоев,

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{H}_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1(\mathbf{H}_b) \\ \pi_2(\mathbf{H}_b) \\ \vdots \\ \pi_\ell(\mathbf{H}_b) \end{pmatrix}$$

является разреженной проверочной матрицей \mathbf{H} размера $\ell bm_0 \times bn_0$, которая определяет ансамбль X-МПП-кодов длины $n = bn_0$, где $n \gg n_0$. Обозначим этот ансамбль $\mathcal{E}(n_0, \ell, b)$.

О п р е д е л е н и е 1. Для компонентного кода Хемминга с проверочной матрицей \mathbf{H}_0 независимо и равновероятно выбирая случайные перестановки π_l , $l = 1, 2, \dots, \ell$, определим ансамбль обобщенных МПП-кодов $\mathcal{E}(n_0, \ell, b)$.

Нижняя оценка на скорость R кода из $\mathcal{E}(n_0, \ell, b)$ определяется формулой:

$$R \geq 1 - \ell(1 - R_0),$$

где $R_0 = \frac{m_0}{2^{m_0} - 1}$ – скорость кода Хемминга. Равенство достигается только в случае, когда \mathbf{H} имеет полный ранг.

Как следует из построения, X-МПП-код из $\mathcal{E}(n_0, \ell, b)$ имеет $n = bn_0$ кодовых символов, которые распределены между ℓb компонентных кодов (b в каждом слое) с проверочной матрицей \mathbf{H}_0 . Такие коды могут быть представлены с помощью двудольного графа Таннера [12] $G = (V_1 : V_2, E)$ с $n = bn_0$ вершинами-символами V_1 и ℓb вершинами-кодами V_2 , как на рис. 1. Каждая вершина-код включает m_0 проверочных уравнений, соответствующих проверочной матрице \mathbf{H}_0 . Если символ входит в проверку кода-компонента, то в графе Таннера существует ребро из E , соединяющее соответствующую

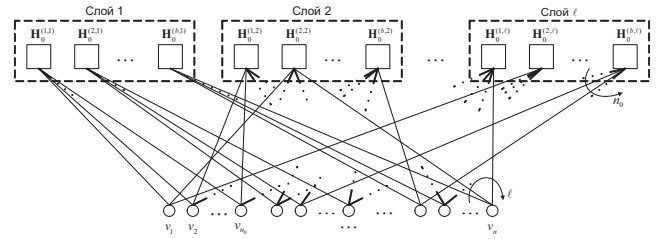


Рис. 1. Двудольный граф Таннера соответствующий проверочной матрице \mathbf{H} МПП-кода Галлагера

вершину-символ из V_1 с соответствующей вершиной-кодом из V_2 . В соответствии с конструкцией проверочной матрицы обобщенного МПП-кода каждый кодовый символ входит в проверки точно одного кода-компонента в каждом слое. Таким образом, соответствующий граф Таннера регулярен со степенью вершины-символа равной ℓ и степенью вершины-кода равной n_0 .

Рассмотрим подробнее компонентный код Хемминга: для любого натурального $m_0 \geq 2$ существует код Хемминга с длиной $n_0 = 2^{m_0} - 1$, размерностью $k_0 = n_0 - m_0$, кодовым расстоянием $d_0 = 3$ и кодовой скоростью $R_0 = 1 - \frac{m_0}{n_0}$. Проверочная матрица \mathbf{H}_0 размера $m_0 \times n_0$ кода Хемминга с параметрами (n_0, k_0, d_0) состоит из всех ненулевых двоичных векторов-столбцов размерности m_0 . Тогда кодовое слово \mathbf{x} кода Хемминга удовлетворяет следующему условию:

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{x}^T = \mathbf{s} = \mathbf{0}.$$

Отметим некоторые простые свойства кода Хемминга, которые нам понадобятся в дальнейшем. Пусть $\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$ принятая последовательность с комбинацией ошибок \mathbf{e} кратности W . Вычислим синдром \mathbf{s} для принятой последовательности:

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{r}^T = \mathbf{H}_0 \mathbf{e}^T = \mathbf{s}.$$

По значению синдрома \mathbf{s} комбинацию ошибок принятой последовательности можно разделить на:

- обнаруженную ($\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$);
- не обнаруженную ($\mathbf{s} = \mathbf{0}$, т.е. комбинация ошибок является кодовым словом кода Хемминга).

В случае если комбинация ошибок обнаружена кодом Хемминга, т.е. $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$, то всегда существует ровно одна позиция, замена символа на которой даст нулевой синдром. Иными словами для любой обнаруженной комбинации ошибок всегда найдется единственное кодовое слово на расстоянии 1. При этом вес обнаруженной комбинации ошибок может быть как на единицу больше (например, комбинация ошибок веса один), так и на единицу меньше (например, комбинация ошибок кратности два), чем вес ближайшего кодового слова. Следовательно, замена данного

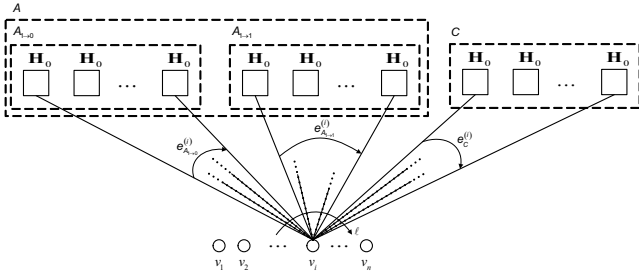


Рис. 2. Двудольный граф Таннера с введенными обозначениями ребер и множеств невыполненных и выполненных проверок

символа у комбинации ошибок с весом большим, чем у ближайшего кодового слова, приведет к уменьшению количества ошибок, а у комбинации ошибок с меньшим весом - к введению новых.

Также важно заметить, что в случае обнаруженной комбинации ошибок замена символа на оставшихся $n_0 - 1$ позициях приведет к тому, что проверка кода Хэмминга останется невыполненной.

Пусть для принятой последовательности \mathbf{r} с W ошибками часть компонентных кодов X-MПП-кода обнаружили эти ошибки. Тогда для каждого i -ого, $i = 1, \dots, n$, символа принятой последовательности все ℓ проверок, в которые он входит делятся на следующие множества (см. рис. 2):

- A – множество кодов-компонентов, обнаруживших ошибки, которое в свою очередь делится на два подмножества:
 - $A_{1 \rightarrow 0}$ – множество кодов-компонентов, проверки которых станут выполненными, после замены данного символа;
 - $A_{1 \rightarrow 1}$ – множество кодов-компонентов, проверки которых останутся невыполненными, после замены данного символа;
- C – множество кодов-компонентов с выполненными проверками.

Тогда мы можем ввести следующие обозначения ребер графа Таннера:

- $e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)}$ – число ребер, выходящих из i -ой вершины-символа и входящих в множество $A_{1 \rightarrow 0}$;
- $e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)}$ – число ребер, выходящих из i -ой вершины-символа и входящих в множество $A_{1 \rightarrow 1}$;
- $e_C^{(i)}$ – число ребер, выходящих из i -ой вершины-символа и входящих в множество C .

З а м е ч а н и е 1. Стоит отметить, что число ребер $e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)}$ также равно количеству проверок, которые станут выполненными после замены i -ого символа. Аналогично $e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)}$ – число проверок, которые останутся невыполненными, а $e_C^{(i)}$ – число проверок, которые окажутся невыполненными после замены i -ого символа.

3. Алгоритм декодирования

3.1. Описание алгоритма

Как отмечалось выше идея алгоритма декодирования заключается в уменьшении количества невыполненных проверок на каждой итерации декодирования, как в работах [8] и [11]. Но в отличие от предыдущих работ мы не требуем, чтобы количество проверок, которые станут нулевыми после замены рассматриваемого i -ого символа, было больше половины всех проверок, или в введенных выше обозначениях:

$$e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} > \frac{\ell}{2}. \quad (1)$$

Мы требуем лишь, чтобы количество проверок, которые станут выполненными, было больше количества проверок, которые станут невыполненными после замены i -ого символа:

$$e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} > e_C^{(i)}. \quad (2)$$

Очевидно, что при замене i -ого символа количество невыполненных проверок уменьшится.

Понятно также, что для компонентного кода с проверкой на четность условие (2) аналогично условию (1), т.к. при замене символа проверка, содержащая данный символ, становится либо выполненной, либо невыполненной. Но для кода Хэмминга условия (1) и (2) различны, т.к. для i -ого символа существует множество проверок, которые останутся невыполненными и после замены i -ого символа. Именно на этой идее и построен алгоритм декодирования для X-MПП-кода.

Рассмотрим более формально алгоритм декодирования \mathcal{A} , каждая i -я итерация, $i = 1, 2, \dots, i_{\max}$, которого состоит из следующих двух шагов:

1. последовательно рассматриваем символы, $j = 1, \dots, n$, декодируемой последовательности $\mathbf{r}^{(i)}$, где $\mathbf{r}^{(1)}$ это принятая последовательность \mathbf{r} :
 - вычисляем $e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(j)}$ и $e_C^{(j)}$;
 - заменяем символ, если $e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(j)} > e_C^{(j)}$ (обновляем последовательность);
 - переходим к следующему символу;

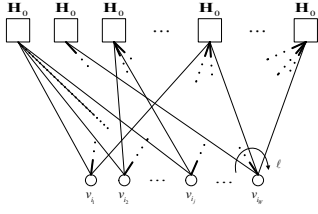


Рис. 3. Подграф графа Таннера содержащий вершины-символы, соответствующие ошибочным символам

2. рассматриваем обновленную последовательность $\mathbf{r}^{(i)}$, полученную на предыдущем шаге:

- если синдром МПП-кода для обновленной последовательности стал нулевым (т.е. нет ни одного компонентного кода с невыполненной проверкой), алгоритм возвращает обновленную ('исправленную') последовательность $\mathbf{r}^{(i)}$, устанавливает флаг успешного декодирования и прекращает выполнение;
- в противном случае если количество невыполненных проверок уменьшилось, то алгоритм переходит к следующей итерации $i+1$ с последовательностью $\mathbf{r}^{(i+1)}$, которая в точности совпадает с обновленной последовательностью $\mathbf{r}^{(i)}$;
- иначе алгоритм устанавливает флаг отказа от декодирования и завершает выполнение.

3.2. Критерий существования заменяемого символа

Получим условие, при котором гарантируется, что для заданного X-МПП-кода и заданной комбинации ошибок кратности W гарантированно найдется символ, замена которого уменьшит количество невыполненных проверок.

Для этого запишем условие замены i -ого символа (2) в следующем виде, учитывая то, что в силу конструкции X-МПП-кода каждый символ входит ровно в ℓ проверок:

$$e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} > e_C^{(i)} = \ell - e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} - e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)}.$$

Тогда

$$2e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} + e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)} > \ell. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим подграф графа Таннера, содержащий вершины, соответствующие ошибочным символам (которых ровно W), и все вершины-коды, соединенные с выбранными вершинами-символами (см. рис. 3). Заметим, что количество ребер в дан-

ном подграфе в точности равно $W\ell$, т.к. каждый символ входит ровно в ℓ проверок, т.е. каждая вершина-символ соединена ровно с ℓ вершинами-кодами. Поскольку каждая вершина-символ имеет набор из ℓ смежных ребер, непересекающийся с наборами других вершин-символов, то условие (3) можно записать в следующем виде:

$$2 \sum_{i=1}^W e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} + \sum_{i=1}^W e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)} > W\ell. \quad (4)$$

Понятно, что если условие (4) для рассматриваемого подграфа выполняется, то среди W рассматриваемых символов, найдется символ, удовлетворяющий условию (2), поскольку в противном случае если $2e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} + e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)} < \ell$ для $i = 1, \dots, W$, то $2 \sum_{i=1}^W e_{A_{1 \rightarrow 0}}^{(i)} + \sum_{i=1}^W e_{A_{1 \rightarrow 1}}^{(i)} < W\ell$. А значит и среди всех n символов X-МПП-кода гарантированно найдется символ, удовлетворяющий этому условию.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что условие (4) гарантирует лишь то, что среди всех n символов найдется символ удовлетворяющий условию (2). При этом не гарантируется, что символ будет непременно ошибочный. При замене правильного символа алгоритмом \mathcal{A} будет внесена ошибка, но при этом количество невыполненных проверок будет уменьшено.

З а м е ч а н и е 3. Именно путем оценки вероятности выполнения условия (4) мы получили оценку на долю гарантированно исправимых ошибок, представленную в следующей части.

4. Основной результат

Для формулировки основного результата необходимо ввести следующие обозначения:

- $g_0(s, n_0)$ – производящая функция количества $G_0^{(i)}$ кодовых слов веса i кода Хэмминга длины n_0 :

$$g_0(s, n_0) = \sum_i G_0^{(i)} s^i = \frac{(1+s)^{n_0} + n_0(1-s)(1-s^2)^{\frac{n_0-1}{2}}}{n_0 + 1}.$$

- $g_1(s, n_0)$ – производящая функция количества $G_1^{(i)}$ комбинаций i ошибок, обнаруживаемых кодом Хэмминга с длиной n_0 :

$$g_1(s, n_0) = \sum_i G_1^{(i)} s^i = (1+s)^{n_0} - g_0(s, n_0).$$

- $g_e(s, v, n_0)$ – производящая функция количества таких $G_e^{(i,j)}$ комбинаций j ошибок, что сумма из

условия (4) равна в точности i :

$$g_e(s, v, n_0) = \sum_i \sum_j G_e^{(i,j)} s^i v^j =$$

$$= g_{A_{1 \rightarrow 0}}(sv, n_0) v + g_1(sv, n_0) - g_{A_{1 \rightarrow 0}}(sv, n_0),$$

где $g_{A_{1 \rightarrow 0}}(sv, n_0)$ – производящая функция таких комбинаций ошибок, вес которых на единицу больше, чем вес ближайшего кодового слова:

$$g_{A_{1 \rightarrow 0}}(s, n_0) = \left(n_0 g_0(s, n_0) - \frac{\partial g_0(s, n_0)}{\partial s} s \right) s.$$

- $h(\omega)$ – функция двоичной энтропии:

$$h(\omega) = -\omega \log_2 \omega - (1 - \omega) \log_2 (1 - \omega).$$

Т е о р е м а 1. Пусть существует корень ω_0 следующего уравнения:

$$h(\omega) - \ell F_e(\omega, n_0) = 0, \quad (5)$$

где $F_e(\omega, n_0)$ определяется выражением:

$$F_e(\omega, n_0) \triangleq h(\omega) + \max_{s>0, 0<v<1} \left\{ \omega \log_2 sv - \frac{1}{n_0} \log_2 (g_e(s, v, n_0) + g_0(s, n_0)) \right\}.$$

Пусть также для найденного значения ω_0 существует корень уравнения α_0 следующего уравнения:

$$h(\alpha_0) - \ell F_s(\alpha_0, \omega_0, n_0, \ell) = 0, \quad (6)$$

где $F_s(\alpha_0, \omega_0, n_0, \ell)$ определяется выражением:

$$F_s(\alpha_0, \omega_0, n_0, \ell) \triangleq h(\alpha_0) + \max_{s>0, 0<v<1} \left\{ \alpha_0 \left(\log_2 s + \frac{\ell - \frac{1-\alpha_0}{\alpha_0} \log_2 v}{\ell} \right) - \frac{1}{n_0} \log_2 (g_1(s, n_0) v + g_0(s, n_0)) \right\}.$$

Тогда в ансамбле $\mathcal{E}(n_0, \ell, b)$ существует код (с вероятностью p такой, что $\lim_{n \rightarrow \infty} p = 1$), который может исправить любую комбинацию ошибок кратности до $\lfloor \alpha_0 \omega_0 n \rfloor$ со сложностью декодирования порядка $\mathcal{O}(n \log n)$.

З а м е ч а н и е 4. Уравнение (5) получено при оценке вероятности выполнения условия (4) методами, разработанными в [11]. Уравнение (5) позволяет получить такое значение доли ошибок ω_0 , что $\forall \omega < \omega_0$ выполняется условие (4). Это означает, что для любых комбинаций ошибок кратности меньше $\lfloor \omega_0 n \rfloor$ алгоритм \mathcal{A} найдет символ, удовлетворяющий условию (2). Но в соответствии с замечанием 2 алгоритм декодирования \mathcal{A} может как исправлять, так и вносить новые ошибки в течение своей работы. Если

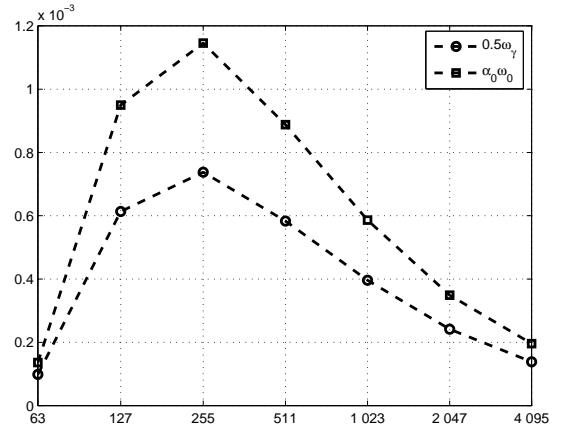


Рис. 4. Доля гарантированно исправимых ошибок двоичным X-МПП-кодом в зависимости от длины кода-компонента при фиксированной скорости $R = 0,5$

же доля ошибок в декодируемой последовательности в какой-то момент превысит найденную долю ω_0 , то в дальнейшем мы не сможем гарантировать, что алгоритм \mathcal{A} найдет символ, удовлетворяющий (2), и как следствие, что найденная доля ошибок гарантированно будет исправлена. Поэтому было введено некоторое условие (6) на количество невыполненных проверок при максимальной кратности ошибок $\lfloor \omega_0 n \rfloor$. Данное условие позволяет нам найти такую долю α_0 от максимальной кратности ошибок $\lfloor \omega_0 n \rfloor$, при которой гарантируется, что количество ошибок в декодируемой последовательности никогда не превысит максимальную кратность. Таким образом, мы можем утверждать, что алгоритм \mathcal{A} гарантированно исправит любую комбинацию ошибок кратности менее $\lfloor \alpha_0 \omega_0 n \rfloor$.

5. Численные результаты

На рис. 4 и в табл. 1 представлены численные результаты доли гарантированно исправимых ошибок при декодировании X-МПП-кода по алгоритму \mathcal{A} в зависимости от длины кода-компонента при фиксированной кодовой скорости $R = 0,5$. Поскольку в данной работе доля α_0 от максимальной достижимой кратности $\lfloor \omega_0 n \rfloor$, при которой выполняется условие (4), не фиксирована и не равна 0,5, как в предыдущих работах [2], [8], [9] и [11], то имеет смысл сравнивать произведение $\alpha_0 \omega_0$, полученное по оценке из данной работы, с произведением $0,5\omega_\gamma$, полученным в работе [11].

Как видно из рис. 4 и табл. 1 предложенная оценка лучше, чем оценка из работы [11]. При этом максимальное улучшение оценки достигается при средних значениях длин кодов-компонентов, на которых

Таблица 1. Доля гарантированно исправимых ошибок X-МПП-кодом

Доли	n_0				
	63	127	255	511	1023
$\alpha_0 \omega_0, 10^{-4}$	1,37	9,50	11,46	8,89	5,86
$0,5 \omega_\gamma, 10^{-4}$	0,99	6,14	7,38	5,84	3,96
$\frac{\alpha_0 \omega_0}{0,5 \omega_\gamma}$	1,38	1,54	1,55	1,52	1,48

Таблица 2. Зависимости ω_0 и α_0 от длины кода-компонента

Доли	n_0				
	63	127	255	511	1023
α_0	0,58	0,51	0,46	0,41	0,37
$\omega_0, 10^{-4}$	0,24	1,86	2,51	2,15	1,57

достигаются максимальные значения гарантированно исправимой доли ошибок. При уменьшении или увеличении длины компонентного кода предложенная оценка стремится к оценке из работы [11].

З а м е ч а н и е 5. Стоит отметить, что в работе [11] оценка из работы [8] была улучшена примерно на два порядка.

В табл. 2 представлена зависимости ω_0 и α_0 для X-МПП-кода при фиксированной скорости $R = 0,5$ в зависимости от длины n_0 кода-компонента. Как видно из табл. 2 доля α_0 уменьшается с ростом длины n_0 . При малых же значениях n_0 доля $\alpha_0 > 0,5$, т.е. больше доли, которая выбиралась в прошлых работах [2], [8], [9] и [11] при меньших значениях ω .

6. Заключение

Изменение критерия замены символа при декодировании X-МПП-кода по алгоритму \mathcal{A} , определенные условия (4) существования заменяемого символа, использование методов оценки количества ребер в графе Таннера с заданными свойствами, разработанных в работе [11], и оригинальный метод оценки доли α_0 от максимально достижимой кратности $[\omega_0 n]$ позволили улучшить оценку из работы [11] и тем самым получить лучшую оценку на долю гарантированно исправимых ошибок при декодировании X-МПП-кодов по алгоритму \mathcal{A} .

Список литературы

- [1] R. G. Gallager, *Low-Density Parity-Check Codes*, MIT Press, 1963.
- [2] В. В. Зяблов, М. С. Пинскер, *Оценка сложности исправления ошибок низкоплотными кодами Галлагера*, Проблемы передачи информации. Т. 11. № 1. (1975), 23–26.
- [3] К. Ш. Зигангиров, А. Е. Пусане, Д. К. Зигангиров, Д. Дж. Костелло, *О корректирующей способности кодов с малой плотностью проверок*, Проблемы передачи информации. Т. 44. № 3. (2008), 50–62.
- [4] Lentmaier M., Zigangirov K. Iterative decoding of generalized lowdensity parity-check codes // Proc. IEEE Int. Symposium on Inform. Theory. 1998. P. 149.
- [5] Lentmaier M., Zigangirov K. On generalized low-density parity-check codes based on Hamming component codes // IEEE Commun. Lett. 1999. vol. 3. no. 8. P. 248 – 250.
- [6] Boutros J., Pothier O., Zemor G. Generalized low density (Tanner) codes // Proc. IEEE Int. Conference on Communications. 1999.
- [7] Stiglmaier S., Zyablov V. V. Asymptotically good low-density codes based on Hamming codes // Proc. XI International Symposium on Problems of Redundancy in Information and Control Systems. Saint-Petersburg. Russia. 2007. P. 98 – 103.
- [8] В. В. Зяблов, Р. Йоханнессон, М. Лончар, *Просто декодируемые коды с малой плотностью проверок на основе кодов Хэмминга*, Проблемы передачи информации. Т. 45. № 2. (2009), 25–40.
- [9] А. А. Фролов, В. В. Зяблов, *Асимптотическая оценка доли ошибок, исправляемых q-ичными МПП-кодами*, Проблемы передачи информации. Т. 46. № 2. (2010), 47–65.
- [10] В. В. Зяблов, П. С. Рыбин, *Исправление стираний кодами с малой плотностью проверок*, Проблемы передачи информации. Т. 45. № 3. (2009), 15–32.
- [11] В. В. Зяблов, П. С. Рыбин, *Оценивание в графе Таннера числа ребер с заданными свойствами*, Информационные технологии и системы. 2010.
- [12] M. Tanner, *A Recursive Approach to Low Complexity Codes*, IEEE Trans. Inform. Theory, vol. 27, no. 5, (1981), pp. 533–547.