

Применение процедур снижения размерности к суррогатной модели аэродинамики крыла самолета в задачах оптимизации

А. Д. Ялалетдинов*, В. В. Чепыжов*, С. С. Чернова**,

* 127994, Москва, Большой Каретный переулок, 19, Институт проблем передачи информации РАН

** 117312, Москва, пр-т 60-летия Октября, 9, Институт системного анализа РАН

email: artur.yalaletdinov@dataadvance.net, chep@iitp.ru, chernova@cpt-ran.ru

Аннотация

В статье описывается подход к решению задачи оптимизации крыла самолета по аэродинамическим характеристикам при крейсерском полете. Целевая функция и функциональные ограничения оптимизации являются аппроксиматорами, реализующими приближенное вычисление аэродинамических характеристик. Входными данными аппроксиматоров являются: геометрическое описание крыла (компоновка) и параметры режима полета, которые представляют собой вектор большой размерности (сотни). В работе построена суррогатная модель, существенно снижающая размерность входных данных аппроксиматоров (десятки), что позволяет эффективно решать задачу оптимизации в сжатом пространстве. Приводятся результаты решения поставленной задачи для ряда компоновок.

1. Введение

На этапе эскизного проектирования сложных технических объектов рассматриваются и сравниваются различные технические решения, касающиеся структуры объекта, механизмов его функционирования, выбора параметров и других элементов объекта, в том числе его геометрической формы. Технология быстрых расчетов предлагает схему исследования поведения объекта, состоящую из нескольких этапов. На первом этапе строится модель изучаемого объекта, например, в виде функциональной зависимости $y = F(x)$, где переменная x описывает сам объект и задает условия его функционирования, а значение y есть некоторая характеристика объекта при заданных условиях функционирования. Сама функция F является неизвестной. Как правило, существует некоторое количество измерений $\Phi = \{y_i = F(x_i), i = 1, 2, \dots\}$, полученных в результате

натурных или вычислительных экспериментов. По известному множеству Φ с использованием тех или иных математических методов анализа и обработки данных строится суррогатная модель - функция $y = F_S(x)$, значения которой принимаются в качестве приближенного значения характеристики y для объекта с описанием x . Далее к построенной суррогатной модели применяют различные математические методы решения экстремальных и оптимизационных задач, которые требуют проведения массовых расчетов с помощью функции $y = F_S(x)$ на большом множестве данных X , существенно превышающем множество измерений.

Если в задачах расчета характеристик объектов в качестве входных данных еще возможно использование детального описания геометрии объекта (например, в задачах аэродинамического проектирования самолета CFD-коды используют описания поверхности самолета, получаемые из CAD-систем), то решение задач оптимизации функций, зависящих от тысяч аргументов, является весьма трудоемким. В этих задачах размерность аргументов функций аппроксимации является существенным ограничивающим фактором. Поэтому одной из самых важных задач является задача снижения размерности описания объекта [1], [2], [3].

В настоящей работе в качестве целевой функции, а также в качестве функциональных ограничений, рассматриваются суррогатные модели или аппроксиматоры, реализующие приближенное вычисление аэродинамических характеристик компоновки самолета. Входными данными аппроксиматоров являются геометрическое описание компоновки и параметры режима полета. Геометрическое описание компоновки задается с использованием сравнительно небольшого числа интегральных геометрических характеристик - параметров модели, которые отражают наиболее существенные аэродинамические и конструкционные свойства самолета и традиционно используются экспертами и инженерами на этапе

предварительного проектирования. Модельное описание компоновки существенно сокращает размерность описания объекта, обеспечивая при этом степень детальности, достаточную для расчета аэродинамических характеристик. Модель позволяет сократить размерность описания компоновки с десятков тысяч параметров до нескольких сотен. Но даже такая размерность остается слишком большой для быстрого решения задачи оптимизации.

Большую часть модельного описания компоновки составляют описания профилей крыла. Для решения задачи оптимизации была разработана основанная на данных процедура снижения размерности, включающая функции компрессии и декомпрессии векторов. Применение процедуры компрессии к описанию профилей позволило сократить размерность переменных оптимизации с $N \sim 400$ до $n = 50$. В докладе также приводятся результаты решения задачи оптимизации для ряда компоновок самолета.

2. Исходные данные работы

Исходными данными являются геометрическая и аэродинамическая модели компоновки [4], [5].

Геометрическая модель позволяет адекватно описывать компоновки самолетов с использованием небольшого числа интегральных геометрических характеристик (параметров модели). Геометрическая модель определяет алгоритм, позволяющий на базе модельных параметров строить 3D описание поверхности компоновки, которое вместе с параметрами режима полета может использоваться в качестве входных данных при вычислении аэродинамических характеристик прямыми методами (CFD-кодами). При варьировании параметров модели можно описывать существующие и проектируемые самолеты со степенью детальности, достаточной для вычисления аэродинамических характеристик с необходимой степенью точности.

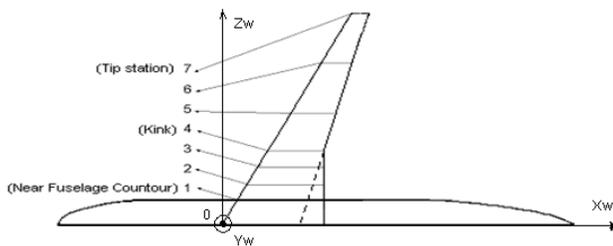


Рис. 1. Модельные сечения крыла

В частности, в подмодели крыла выделены $N_w = 7$ сечений, положения которых по размаху крыла

строго фиксированы (Рис. 1).

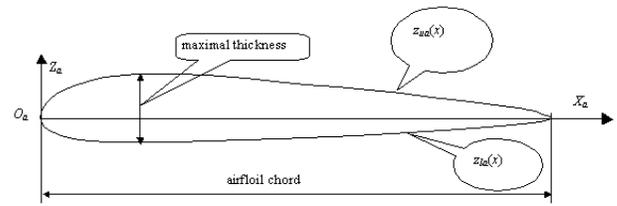


Рис. 2. Система координат профиля

Профиль крыла есть сечение крыла плоскостью, параллельной базовой плоскости самолета. Основные характеристики профиля проиллюстрированы на Рис. 2. *Хордой профиля* называется отрезок прямой линии, соединяющий середину задней кромки профиля и его переднюю точку. Длина хорды C_a профиля равна ширине крыла в выбранном сечении. Система координат профиля $O_a X_a Z_a$ представляет собой прямоугольную систему координат, в которой точка O_a начала координат совпадает с передней точкой профиля; ось $O_a X_a$ расположена вдоль хорды профиля и проходит через заднюю точку профиля; ось $O_a Z_a$ перпендикулярна оси $O_a X_a$ и дополняет ее до правосторонней прямоугольной системы координат. Хорда профиля условно разбивает контур профиля на нижнюю и верхнюю части контура, которые в модели описываются уравнениями $Z_u(X)$ и $Z_l(X)$. При этом система координат профиля выбирается так, что на задней кромке профиля в точке $X = C_a$ выполняется соотношение $Z_u(C_a) = -Z_l(C_a)$.

Важной характеристикой крыла является его *толщина* в заданном сечении, которая вычисляется по формуле:

$$T_a = \max_{X \in [0, C_a]} \{Z_u(X) - Z_l(X)\} \quad (1)$$

Величина задаваемая формулой

$$t_a = \frac{T_a}{C_a}, \quad (2)$$

называется *относительной толщиной профиля*.

При задании профиля крыла значения координаты X нормируются по отношению к длине хорды профиля C_a , т.е. вместо координат X профиля, принимающих значения в диапазоне $[0; C_a]$, используются относительные координаты $x = \frac{X}{C_a}$, принимающие значения из отрезка $[0; 1]$, а для описания контуров профиля используются нормализованные функции $z_u(x)$ и $z_l(x)$:

$$z_u(x) = \frac{Z_u(X)}{C_a}, \quad z_l(x) = \frac{Z_l(X)}{C_a}, \quad x \in [0; 1], \quad X \in [0; C_a] \quad (3)$$

Для определения параметров подмодели профиля выбрано 30 значений аргументов функций $z_u(x)$ и $z_l(x)$:

$$X_a = \{0 = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{29} \leq x_{30} = 1\} \quad (4)$$

Из определения системы координат профиля следует, что:

$$z_u(x_1) = z_l(x_1) = 0, \quad z_u(x_{30}) = -z_l(x_{30}),$$

поэтому две точки в описании профиля являются избыточными и могут быть удалены. По выбранному множеству аргументов X_a вычисляется величина

$$t = \max\{z_u(x_i) - z_l(x_i), x_i \in X_a, i = 1, \dots, 30\} \quad (5)$$

Величина t есть относительная максимальная толщина профиля, вычисленная по дискретному набору точек контуров профиля. В общем случае значение t может отличаться от значения t_a , вычисленного для непрерывных функций $Z_u(X)$ и $Z_l(X)$ с помощью формул (1), (2). В качестве параметров подмодели профиля выбираются:

- 57-мерный Вектор Профиля MAV (Model Airfoil Vector)

$$MAV = \{z_u(x_{30}), z_u(x_{29}), \dots, z_u(x_2), z_l(x_2), z_l(x_3), \dots, z_l(x_{29})\} \quad (6)$$

- относительная толщина профиля t , определяемая соотношением (5)

Дополнительно форма крыла моделируется путем поворота профилей в модельных сечениях на заданный угол крутки. Угол крутки профиля ϕ_i в i -м сечении (Рис. 1) определяется как угол между хордой сечения крыла в i -м сечении и плоскостью $O_w X_w Z_w$. Это определение проиллюстрировано на Рис. 3. Таким образом, модельное описание

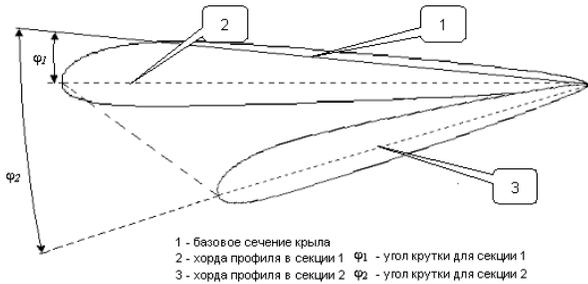


Рис. 3. Углы крутки

компоновки есть вектор La , содержащий полный набор модельных параметров, который включает описание 7-ми модельных сечений крыла. Описание одного сечения состоит из:

- значения угла крутки;
- 57-мерного вектора MAV (6).

Геометрическая модель крыла включает ряд ограничений на соотношения модельных параметров. Модель требует "несамопересечения" профилей, то есть выполнения условия:

$$z_u(x) + z_l(x) \geq 0; \quad (7)$$

В каждом модельном сечении для толщины и угла крутки определены диапазоны допустимых значений:

$$t_i^{\min} \leq t_i \leq t_i^{\max}, i = 1, \dots, 7, \quad (8)$$

$$\phi_i^{\min} \leq \phi_i \leq \phi_i^{\max}, i = 1, \dots, 7. \quad (9)$$

Кроме того, последовательности значений толщины и углов крутки в модельных сечениях по размаху крыла должны образовывать монотонные последовательности:

$$t_{i-1} \geq t_i \geq t_{i+1}, i = 2, \dots, 6, \quad (10)$$

$$\phi_{i-1} \geq \phi_i \geq \phi_{i+1}, i = 2, \dots, 6. \quad (11)$$

Аэродинамическая модель есть множество функций вычисления аэродинамических характеристик компоновки. Каждая такая функция AC (Aerodynamic characteristics) зависит от параметров геометрической модели La и параметров режима полета FR (Flight regime):

$$AC = AC(La, FR). \quad (12)$$

Для построения аэродинамической модели было выбрано множество компоновок

$$\Theta = \{La_i, i = 1, \dots, r\}, \quad (13)$$

для которых с использованием прямых методов (CFD-кодов) были проведены вычислительные эксперименты и вычислены аэродинамические характеристики для различных значений параметров режима полета. В результате было получено множество данных, состоящее из M пар $\{X_i = (La_i, FR_i), AC_i = AC(La_i, FR_i), i = 1, 2, \dots, M\}$, каждая из которых состоит из входного p -мерного вектора X_i (описания компоновки и режима полета) и выходного q -мерного вектора $AC_i = AC(La_i, FR_i)$ (набор аэродинамических характеристик). На основании этих данных строятся аналитические аппроксимации для неизвестных функций, выражающих зависимость аэродинамических характеристик от параметров геометрического описания компоновок и параметров режима полета. Построенные аппроксимации и есть суть аэродинамической модели. Единожды

построенная аэродинамическая модель вычисляет аэродинамические характеристики новой заданной компоновки для заданных режимов полета как значения построенных аппроксимирующих функций без использования прямых методов расчета.

3. Математическая постановка задачи оптимизации и метод решения

Дана целевая функция (дифференцируемая) $F(x) = F(x_1, \dots, x_n)$. Даны параметрические ограничения в виде: $Ax \leq b$, где A - матрица размера $m \times n$ (m - количество параметрических ограничений), b - вектор размерности m правых частей ограничений; и функциональные ограничения $g_i(x) = 0, i = 1, \dots, k; g_i(x) \leq 0, i = k + 1, \dots, s$. Эти ограничения определяют множество D допустимых значений $x \in D$.

Требуется найти глобальный минимум x^* целевой функции на множестве D :

$$F(x^*) = \min_{x \in D} F(x), \quad (14)$$

$$D = \{x | Ax \leq b, g_i(x) = 0, i = 1..k; g_i(x) \leq 0, i = k + 1..m\}. \quad (15)$$

Задача оптимизации решается методом штрафа. Не смотря на то, что этот метод не считается эффективным при решении ряда классов задач условной минимизации, этот подход в теории оптимизации остается востребованным из-за его универсальности, простоты и нетребовательности к целевой функции и функциям ограничений.

В использованную схему оптимизации по методу штрафа внесено ряд существенных модификаций. Во-первых, штрафуются только нелинейные ограничения, причем коэффициенты штрафа выбираются и наращиваются отдельно для каждого ограничения по своему правилу, что позволяет “выравнивать масштаб” переменных. Во-вторых, сначала разрешаются ограничения, т.е., находится точка, удовлетворяющая ограничениям, после чего в штрафную функцию включается целевая функция, и при этом коэффициенты штрафа пересчитываются исходя из локальных свойств градиентов функций. Это позволяет уменьшить число внешних итераций алгоритма при нарастании коэффициентов штрафа. Наконец, при фиксированных коэффициентах штрафа, внутренний шаг алгоритма, на котором минимизируется функция штрафа, решает задачу безусловной оптимизации на выпуклом многограннике. Здесь применяется стандартный быстрый локальный квазиньютоновский метод Давидона-Флетчера-Пауэлла минимизации с релаксацией.

Напомним, что метод штрафа сходится по геометрической прогрессии к решению задачи

глобальной оптимизации, если внутренний алгоритм решает задачу глобальной оптимизации (см. [6]). Например, если функция штрафа является выпуклой. В общем случае приходится использовать метод “мультистарта”, который в нашем случае был реализован на внутреннем уровне. При этом пришлось решать отдельную интересную задачу случайного выбора точки внутри многогранника, заданного только неравенствами вида $Ax \leq b$, с “равномерным” распределением по его объему. Это было сделано с помощью решения некоторой вспомогательной задачи линейного программирования.

4. Инженерная постановка задачи

В работе решается задача оптимизации в следующей постановке: найти такую модификацию параметров крыла, которая для крейсерского режима полета при заданном коэффициенте подъемной силы имела бы наилучшее аэродинамическое качество.

Входными параметрами задачи оптимизации являются

- компоновка, представленная своим модельным описанием;
- набор изменяемых параметров крыла;
- множество ограничений на значения геометрических параметров компоновки;
- множество ограничений на значения аэродинамических характеристики компоновки.

Для решения задачи необходимо определить:

- множество переменных оптимизации;
- множество параметрических ограничений, то есть ограничений на значения переменных, выход за которые в процессе оптимизации запрещен;
- множество функциональных ограничений.

Множество переменных оптимизации.

Контуры профиля представляют собой гладкие кривые, форма которых определяется требуемыми аэродинамическими свойствами профиля. Поэтому многообразие N -мерного евклидова пространства, в котором лежат всевозможные векторы профилей, может быть с нужной точностью аппроксимировано многообразием существенно меньшей размерности. Отсюда следует, что размерность вектора, описывающего профиль, может быть существенно снижена без потери точности.

Рассмотрим выборку

$$W_r(s) = \{w_1(s), w_2(s), \dots, w_r(s)\} \in R^{57}, \quad (16)$$

полученную из выборки компонок Θ (13) и состоящую из 57-мерных векторов профилей, связанных с сечением s , $s = 1, \dots, 7$.

По выборке $W_r(s)$ построим линейную процедуру сжатия K :

$$K : w \in R^{57} \rightarrow \lambda \in R^n, \quad (17)$$

преобразующую вектор w в n -мерный сжатый вектор $\lambda = K(w)$; и процедуру восстановления K^* :

$$K^* : \lambda \in R^n \rightarrow w^* \in R^{57}, \quad (18)$$

преобразующую n -мерный сжатый вектор $\lambda = K(w)$ в полноразмерный вектор $w^* = K^*(\lambda)$. В работе было выбрано $n = 6$ как минимальное значение, при котором выполняются заданные требования по близости между исходным (w) и восстановленным ($w^* = K^*(K(w))$) векторами. Для построения линейной процедуры сжатия был применен метод анализа главных компонент. В результате для каждого сечения была получена матрица преобразования $K(s)$, $s = 1, \dots, 7$, размера 6×57 . В силу линейности процедура сжатия есть преобразование:

$$\lambda = Kw, \quad (19)$$

а процедура восстановления есть преобразование

$$w = \lambda K^T. \quad (20)$$

Тогда в качестве переменных оптимизации выбран вектор $p = (p_1, \dots, p_{50})$ в котором:

- p_1, \dots, p_7 есть значения параметров углов крутки;
- p_8, \dots, p_{49} есть сжатые до размерности 6 модельные вектора профилей в семи сечениях крыла;
- p_{50} - угол атаки.

Остальные параметры компоновки и режима полета не изменяются.

Множество параметрических ограничений составили:

- условие на несамопересечение профилей (7);
- ограничения на значения углов крутки (1);
- условия монотонности углов крутки по размаху крыла (11);
- ограничение на значение угла атаки:

$$\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max} \quad (21)$$

- ограничение на значения переменных p_8, \dots, p_{49} .

Условие (7) на несамопересечение профилей реализуется следующим образом. Обозначим через $K_i^T(s)$; $i = 2, \dots, 29$, i -ый столбец матрицы $K(s)$ тогда для вектора профиля в сечении s должно выполняться условие

$$\lambda(K_i^T(s) - K_{59-i}^T(s)) > 0. \quad (22)$$

Ограничения на значения переменных p_8, \dots, p_{49} получены следующим образом. К каждой выборке $W_r(s)$, $s = 1, \dots, 7$, применим процедуру сжатия, построенную по этой выборке. В результате мы получим множество $\Lambda_r(s)$ сжатых векторов профилей. Для каждой координаты j , $j = 1, \dots, 6$ найдем минимальное и максимальное значения в множестве $\Lambda_r(s)$:

$$P_{7+6(s-1)+j}^{\min} \leq P_{7+6(s-1)+j} \leq P_{7+6(s-1)+j}^{\max}, \quad (23)$$

$$j = 1, \dots, 7; s = 1, \dots, 6,$$

где $P_{7+6(s-1)+j}^{\min}$ и $P_{7+6(s-1)+j}^{\max}$ соответственно минимальное и максимальное значения, полученные по множествам $\Lambda_r(s)$, $s = 1, \dots, 7$ для j -й координаты сжатого вектора.

Эти значения будем использовать в качестве ограничений на значения переменных в сжатом пространстве.

Функциональные ограничения можно подразделить на две группы: ограничения, связанные с геометрией крыла, и ограничения, связанные с аэродинамическими требованиями.

Для ограничений, связанных с геометрией крыла, введем 7 функций T_j , вычисляющих относительную максимальную толщину профиля (5):

$$T_j = \max_i (\lambda(K_i^T(s) - K_{59-i}^T(s))), \quad j = 1, \dots, 7; i = 2, \dots, 29, \quad (24)$$

и потребуем для них выполнения условий (8) и (10):

$$t_j^{\min} \leq T_j \leq t_j^{\max} \quad j = 1, \dots, 7, \quad (25)$$

$$T_{j-1} \geq T_j \geq T_{j+1}, \quad j = 2, \dots, 6. \quad (26)$$

Ограничения, связанные с аэродинамическими требованиями. (Взяты из [4], [5]). В аэродинамике под *аэродинамическим качеством* компоновки Q понимается отношение

$$Q = \frac{CL}{CD}, \quad (27)$$

где CL есть коэффициент суммарной подъемной силы, а CD - коэффициент общего сопротивления. Причем $CD = CD_{WAVE} + CD_{IND} + CD_{FP}$ есть сумма коэффициентов волнового, индуктивного и профильного сопротивлений, на значения которых наложены ограничения снизу:

$$CD_{FP} \geq 0.006, \quad (28)$$

$$CDIND \geq 0.8 * CL^2 / (\pi * ARW), \quad (29)$$

где ARW - коэффициент удлинения крыла,

$$CDWAVE \geq 0. \quad (30)$$

Кроме того, оценивается также коэффициент CLD распределения подъемной силы по крылу, который измеряется в 20 точках по размаху крыла и в каждой точке имеет ограничение снизу:

$$CLD_i \geq CLD_i^{\min}, i = 1, \dots, 20. \quad (31)$$

Также накладывається условие монотонности последовательности значений CLD вдоль крыла:

$$CLD_{i-1} - CLD_i \geq 0, i = 2, \dots, 20. \quad (32)$$

В аэродинамике принято сравнивать аэродинамические характеристики компоновки при фиксированном коэффициенте подъемной силы

$$CL(FR, La) = 0.5. \quad (33)$$

Добавим к функциональным ограничениями ограничение (33).

5. Итоговая формальная постановка задачи

В силу условия (33) задача максимизации аэродинамического качества (27) сводится к задаче минимизации величины CD .

Обозначим множество переменных оптимизации за $P = \{p_1, p_2, \dots, p_{50}\}$ и определим D - область допустимых значений P следующим образом:

- допустимые значения переменных p_1, \dots, p_7 определяются ограничениями на значения углов крутки и их монотонностью (9), (11);
- допустимые значения переменных p_8, \dots, p_{49} определяются условиями (22), (23);
- значение p_{50} ограничено допустимыми значениями угла атаки α (21);

Функциональные ограничения включают условия (25 - 26), (28 - 33). Общее количество функциональных ограничений равно 56.

6. Полученные результаты

В таблице 1 приводятся аэродинамические характеристики, вычисленные до и после оптимизации ряда компоновок самолета в условиях некоторого зафиксированного режима крейсерского полета.

Таблица 1. Сравнительная таблица результатов оптимизации

Компоновка	CDIND	CDFP	CDWAVE	CD
комп. 1	0.095884	0.013794	0.001154	0.024537
комп. 1 опт.	0.009093	0.01391	0.000842	0.023846
комп. 2	0.010636	0.004284	0.001154	0.03005
комп. 2 опт.	0.011261	0.015405	0.001126	0.02786
комп. 3	0.009544	0.015743	0.0023409	0.027628
комп. 3 опт.	0.0094844	0.016224	0.0012994	0.027
комп. 4	0.0138	0.014984	0.0026651	0.031448
комп. 4 опт.	0.012005	0.015381	0.001012	0.028398

Эти результаты можно назвать “локальной” оптимизацией, поскольку исходные точки (компоновки), удовлетворяющие всем заданным ограничениям, были заранее известны.

В работе также проводились тесты по “глобальной” оптимизации по методу “мультистарта”. Для этого много раз выбиралась случайная компоновка, удовлетворяющая всем ограничениям, после чего минимизировалась целевая функция. В конце из всех найденных решений выбиралось то, которому соответствует минимальное значение целевой функции. В результате получались компоновки, имеющие коэффициенты CD , не уступающие результатам, приведенным в таблице 1.

7. Выводы

В работе продемонстрирована принципиальная возможность нахождения компоновки самолета с хорошим аэродинамическим качеством, решая задачу оптимизации на соответствующей суррогатной модели, в которой все реальные физические функции и зависимости заменяются своими аппроксиматорами, построенными по большой выборке данных реальных компоновок и различных режимов полета. Алгоритмы работают достаточно быстро, что позволяет на стадии первоначального инженерного проектирования в реальном времени отбирать компоновки, заслуживающие более пристального исследования с привлечением уже более точных, но затратных методов.

Было обнаружено, что для получения физически оправданных результатов, чрезвычайно важен правильный выбор области определения аппроксиматоров, где они хорошо приближают физические данные. В противном случае алгоритм оптимизации легко “сваливается” к физически неадекватным минимумам.

Список литературы

- [1] А.В.Бернштейн, А.П. Кулешов, *Когнитивные технологии в проблеме снижения размерности описания геометрических объектов*, Информационные технологии и вычислительные системы. 2008, №2.

- [2] А.П. Кулешов, *Интеграция данных и знаний при построении метамоделей*, Труды Третьей международной конференция "Системный анализ и информационные технологии" (САИТ-2009, 14-18 сентября 2009 г., Звенигород, Россия). 2009, с. 20 – 29.
- [3] А.В.Бернштейн, А.П. Кулешов, *Математические методы построения метамоделей*, Труды Третьей международной конференция "Системный анализ и информационные технологии" (САИТ-2009, 14-18 сентября 2009 г., Звенигород, Россия). 2009, с. 756 – 768.
- [4] А.В.Бернштейн, В.В.Вышинский, А.П. Кулешов, Ю.Н.Свириденко, *Быстрый метод аэродинамического расчета для задач проектирования*, Труды Центрального аэрогидродинамического института им.проф.Н.Е.Жуковского. Выпуск № 2678 "Применение искусственных нейронных сетей в задачах прикладной аэродинамики". М.: ЦАГИ, 2008.
- [5] А.В.Бернштейн, В.В.Вышинский, А.П. Кулешов, Ю.Н.Свириденко, *Применение искусственных нейронных сетей для определения нагрузок по крылу пассажирского самолета на режиме крейсерского полета*, Труды Центрального аэрогидродинамического института им.проф.Н.Е.Жуковского. Выпуск № 2678 "Применение искусственных нейронных сетей в задачах прикладной аэродинамики". М.: ЦАГИ, 2008.
- [6] Поляк Б.Т., Введение в оптимизацию.- М.: Наука, 1983.